

# MATEMATIKA

## I. RÉSZLETES ÉRETTSÉGVIZSGA-KÖVETELMÉNY

Az érettségi követelményeit két szinten határozzuk meg:

*középszinten* a mai társadalomban tájékozódni és alkotni tudó ember matematikai ismereteit kell megkövetelni, ami elsősorban a matematikai fogalmak, tételek gyakorlati helyzetekben való ismeretét és alkalmazását jelenti;

az *emelt szint* tartalmazza a középszint követelményeit, de az azonos módon megfogalmazott követelmények körében az emelt szinten nehezebb, több ötletet igénylő feladatok szerepelnek. Ezen túlmenően az emelt szint követelményei között speciális anyagrészek is találhatóak, mivel emelt szinten elsősorban a felsőoktatásban matematikát használó, illetve tanuló diákok felkészítése történik.

### A) KOMPETENCIÁK

*Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok*

- Legyen képes a tanuló adott szövegben rejlő matematikai problémákat észrevenni, szükség esetén matematikai modellt alkotni, a modell alapján számításokat végezni, és a kapott eredményeket értelmezni.
- Legyen képes kijelentéseket szabatosan megfogalmazni, azokat összekapcsolni, kijelentések igazságtartalmát megállapítani.
- Lássza az eltéréseket, illetve a kapcsolatokat a matematikai és a mindennapi nyelv között.
- A matematika minden területén és más tantárgyakban is tudja alkalmazni a halmaz fogalmát, illetve a halmazműveleteket.
- Legyen jártas alapvető kombinatorikus gondolatmenetek alkalmazásában, s legyen képes ennek segítségével gyakorlati sorbarendezési és kiválasztási feladatok megoldására.
- Ismerje a gráfok jelentőségét, sokoldalú felhasználhatóságuk néhány területét, és legyen képes további felhasználási lehetőségek felismerésére a gyakorlati életben és más tudományágakban.
- Az *emelt szinten* érettségiző diák ismerje a halmazelmélet alapvető szerepét a mai matematika felépítésében.

*Számelmélet, algebra*

- Legyen képes a tanuló betűs kifejezések értelmezésére, ismerje fel használatuk szükségességét, tudja azokat kezelni, lássa, hogy mi van a „betűk mögött”.
- Ismerje az egyenlet és az egyenlőtlenség fogalmát, megoldási módszereit (pl. algebrai, grafikus, közelítő).
- Legyen képes egy adott probléma megoldására felírni egyenleteket, egyenletrendszereket, egyenlőtlenségeket, egyenlőtlenség-rendszereket.
- Tudja az eredményeket előre megbecsülni, állapítsa meg, hogy a kapott eredmény reális-e.
- Az *emelt szinten* érettségiző diáknak legyen jártassága az összetettebb algebrai átalakításokat igénylő feladatok megoldásában is.

*Függvények, az analízis elemei*

- Legyen képes a tanuló a körülötte levő világ egyszerűbb összefüggéseinek függvényszerű megjelenítésére, ezek elemzéséből tudjon következtetni valóságos jelenségek várható lefolyására.
- Legyen képes a változó mennyiségek közötti kapcsolat felismerésére, a függés értelmezésére. Értse, hogy a függvény matematikai fogalom, két halmaz elemeinek egymáshoz rendelése. Ismerje fel a hozzárendelés formáját, elemezze a halmazok közötti kapcsolatokat.
- Lássza, hogy a sorozat diszkrét folyamatok megjelenítésére alkalmas matematikai eszköz, a pozitív egész számok halmazán értelmezett függvény. Ismerje a számtani és mértani sorozatot.
- Az *emelt szinten* érettségiző diák ismerje az analízis néhány alapelemét, amelyekre más szaktudományokban is (pl. fizika) szüksége lehet. Ezek segítségével tudjon függvényvizsgálatokat végezni, szélsőértéket, görbe alatti területet számolni.

### Geometria, koordinátageometria, trigonometria

- Tudjon a tanuló síkban, illetve térben tájékozódni, térbeli viszonyokat elképzelni, tudja a háromdimenziós valóságot - alkalmas síkmetszetekkel - két dimenzióban vizsgálni.
- Vegye észre a szimmetriákat, tudja ezek egyszerűsítő hatásait problémák megfogalmazásában, bizonyításokban, számításokban kihasználni.
- Tudjon a feladatok megoldásához megfelelő ábrát készíteni.
- Tudjon mérni és számolni hosszúságot, területet, felszínt, térfogatot, legyen tisztában a mérési pontosság fogalmával.
- Ismerje a geometria szerepét a műszaki életben és bizonyos képzőművészeti alkotásokban.
- Az *emelt szinten* érettségiző diák tudja szabatosan megfogalmazni a geometriai bizonyítások gondolatmenetét.

### Valószínűség-számítás, statisztika

- Értse a tanuló a statisztikai kijelentések és gondolatmenetek sajátos természetét.
- Ismerje a statisztikai állítások igazolására felhasználható adatok gyűjtésének lehetséges formáit, és legyen jártas a kapott adatok áttekinthető szemléltetésében, különböző statisztikai mutatókkal való jellemzésében.
- Az *emelt szinten* érettségiző diák tudjon egyszerűbb véletlenszerű jelenségeket modellezni és a valószínűségi modellben számításokat végezni.
- *Emelt szinten* ismerje a véletlen szerepét egyszerű statisztikai mintavételi eljárásokban.

## B) VIZSGAKÖVETELMÉNYEK

### 1. Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok

E témakört (különösen a gondolkodási módszereket, a halmazokat és a matematikai logikát) elsősorban nem önállóan számon kérhető ismeretanyagként kell elképzelni, hanem olyan szemléletformáló, a matematikaoktatás egészét átszövő módszerek, illetve eszközök összességéeként, amely szinte teljes egészében megjelenik minden további témakörben is.

TÉMAK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
<b>1.1. Halmazok</b>	Ismerje és használja a halmazok megadásának különböző módjait, a halmaz elemének fogalmát. Definiálja és alkalmazza gyakorlati és matematikai feladatokban a következő fogalmakat: halmazok egyenlősége, részhalmaz, üres halmaz, véges és végtelen halmaz, komplementer halmaz.	
1.1.1. Halmazműveletek	Ismerje és alkalmazza gyakorlati és matematikai feladatokban a következő műveleteket: egyesítés, metszet, különbség. Tudjon koordináta-rendszerben ábrázolni egyszerűbb ponthalmazokat.	
1.1.2. Számosság, részhalmazok	Véges halmazok elemeinek száma.	Ismerjen példát véges, megszámlálhatóan végtelen és nem megszámlálhatóan végtelen halmazra.
<b>1.2. Matematikai logika</b>	Tudjon egyszerű matematikai szövegeket értelmezni. Ismerje és alkalmazza megfelelően a kijelentés (állítás, ítélet) fogalmát. Értse és egyszerű feladatokban alkalmazza az állítás tagadása műveletet.	Alkalmazza tudatosan a nyelv logikai elemeit.

TÉMÁK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
1.2.1. Fogalmak, tételek és bizonyítások a matematikában	<p>Ismerje az „és”, a „(megengedő) vagy” logikai jelentését, tudja használni és összekapcsolni azokat a halmazműveletekkel. Értse és használja helyesen az implikációt és az ekvivalenciát.</p> <p>Használja helyesen a „minden”, „van olyan” kvantorokat.</p> <p>Tudjon definíciókat, tételeket pontosan megfogalmazni.</p> <p>Használja és alkalmazza feladatokban helyesen a „szükséges”, az „elégleges” és a „szükséges és elégséges” feltétel fogalmát.</p>	<p>Ismerje az alábbi bizonyítási típusokat és tudjon példát mondani alkalmazásukra: direkt és indirekt bizonyítás, skatulyaelv.</p> <p>Tudja megfogalmazni konkrét esetekben tételek megfordítását.</p>
<b>1.3. Kombinatorika</b>	<p>Tudjon egyszerű sorbarendezési, kiválasztási és egyéb kombinatorikai feladatokat megoldani.</p> <p>Tudja kiszámolni a binomiális együtthatókat.</p>	<p>Ismerje, bizonyítsa és alkalmazza a permutációk, variációk (ismétlés nélkül és ismétléssel), kombinációk (ismétlés nélkül) kiszámítására vonatkozó képleteket.</p> <p>Ismerje és alkalmazza a binomiális tételt.</p>
<b>1.4. Gráfok</b>	<p>Tudjon konkrét szituációkat szemléltetni, és egyszerű feladatokat megoldani gráfok segítségével.</p>	<p>Definiálja a következő fogalmakat: pont, él, fok, út, kör, összefüggő gráf, fa.</p> <p>Ismerje az egyszerű gráf pontjainak foka és éleinek száma, valamint a fa pontjai és élei száma közötti összefüggést.</p>

## 2. Számelmélet, algebra

Az algebra tanításának egyik fő célja annak felfedeztetése és megértetése, hogy egymástól távol állónak tűnő problémák ugyanazon matematikai, algebrai struktúrával rendelkeznek, ezért megoldásuk során hasonló eljárásokat, gondolatmeneteket alkalmazhatunk, s leírásuk formálisan azonos módon történik. (Például különböző témakörökből vett másodfokú egyenletre vezető feladatok.)

Fontos a számolás során megismert műveleti szabályok absztrahálása, a jártasság megszerzése a betűkifejezésekkel végzett műveletekben. Meg kell mutatni a számfogalom bővítésének szükségességét és folyamatát. El kell juttatni a tanulókat a permanencia-elv fontosságának felismeréséhez.

TÉMÁK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
<b>2.1. Alapműveletek</b>	<p>Tudjon alapműveleteket biztonságosan elvégezni (zsebszámológéppel is).</p> <p>Ismerje és használja feladatokban az alapműveletek műveleti azonosságait (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás).</p>	
<b>2.2. A természetes számok halmaza, számelméleti ismeretek</b>	<p>Ismerje, tudja definiálni és alkalmazni az oszthatósági alapfogalmakat (osztó, többszörös, prímszám, összetett szám).</p> <p>Tudjon természetes számokat prímtényezőkre bontani, tudja adott számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét kiszámítani; tudja mindezeket egyszerű szöveges (gyakorlati) feladatok megoldásában alkalmazni.</p>	

TÉMAK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
<p>2.2.1. Oszthatóság</p> <p>2.2.2. Számrendszerek</p>	<p>Definiálja és alkalmazza feladatokban a relatív prímszámokat.</p> <p>Tudja a számelmélet alaptételét alkalmazni feladatokban.</p> <p>Ismerje a 10 hatványaira, illetve a 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 számokra vonatkozó oszthatósági szabályokat, tudjon egyszerű oszthatósági feladatokat megoldani.</p> <p>Tudjon más számrendszerek létezéséről.</p> <p>Tudja a számokat átírni 10-es alapú számrendszerből 2 alapú számrendszerbe és viszont.</p> <p>Helyiértékes írásmód.</p>	<p>Tudja pontosan megfogalmazni a számelmélet alaptételét.</p> <p>Oszthatósági feladatok.</p> <p>Tudja a számokat átírni 10-es alapú számrendszerből n alapú számrendszerbe és viszont.</p>
<b>2.3. Racionális és irracionális számok</b>	<p>Tudja definiálni a racionális számot és ismerje az irracionális szám fogalmát.</p> <p>Adott n (<math>n \in \mathbb{N}</math>) esetén tudja eldönteni, hogy <math>\sqrt{n}</math> irracionális szám-e.</p>	<p>Bizonyítsa, hogy <math>\sqrt{2}</math> irracionális szám.</p>
<b>2.4. Valós számok</b>	<p>Ismerje a valós számkör felépítését (<math>\mathbb{N}</math>, <math>\mathbb{Z}</math>, <math>\mathbb{Q}</math>, <math>\mathbb{Q}^*</math>, <math>\mathbb{R}</math>), valamint a valós számok és a számegyenes kapcsolatát.</p> <p>Tudjon ábrázolni számokat a számegyenesen.</p> <p>Tudja az abszolútérték definícióját.</p> <p>Ismerje adott szám normálalakjának felírási módját, tudjon számolni a normálalakkal.</p>	<p>Tudja, hogy mit értünk adott műveletekre zárt számhalmazokon.</p>
<b>2.5. Hatvány, gyök, logaritmus</b>	<p>A hatványozás értelmezése racionális kitevő esetén.</p> <p>Ismerje és használja a hatványozás azonosságait.</p> <p>Definiálja és használja az <math>\sqrt[n]{a}</math> fogalmát.</p> <p>Ismerje és alkalmazza a négyzetgyökvonás azonosságait.</p> <p>Definiálja és használja feladatok megoldásában a logaritmus fogalmát, valamint a logaritmus azonosságait. Tudjon áttérni más alapú logaritmusra.</p>	<p>Permanencia elv.</p> <p>Irracionális kitevőjű hatvány értelmezése szemléletesen.</p> <p>Bizonyítsa a hatványozás azonosságait egész kitevő esetén.</p> <p>Bizonyítsa a négyzetgyökvonás azonosságait.</p> <p>Bizonyítsa a logaritmus azonosságait.</p>
<p><b>2.6. Betűkifejezések</b></p> <p>2.6.1. Nevezetes azonosságok</p>	<p>Ismerje a polinom fokszámát, fokszám szerint rendezett alakját.</p> <p>Tudja alkalmazni feladatokban a következő kifejezések kifejtését, illetve szorzattá alakítását: <math>(a + b)^2</math>; <math>(a - b)^2</math>; <math>(a + b)^3</math>; <math>(a - b)^3</math>; <math>a^2 - b^2</math>; <math>a^3 - b^3</math>;</p> <p>Tudjon algebrai kifejezésekkel egyszerű műveleteket végrehajtani, algebrai kifejezéseket egyszerűbb alakra hozni (összevonás, szorzás, osztás, szorzattá alakítás kiemeléssel, nevezetes azonosságok alkalmazása).</p>	<p>Tudja alkalmazni feladatokban az <math>a^n - b^n</math>, illetve az <math>a^{2m+1} + b^{2m+1}</math> kifejezés szorzattá alakítását.</p>

TÉMAK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
<p><b>2.7. Arányosság</b></p> <p>2.7.1. Százalékszámítás</p>	<p>Tudja az egyenes és a fordított arányosság definícióját és grafikus ábrázolásukat.</p> <p>Tudjon arányossági feladatokat megoldani.</p> <p>Százalékszámítással kapcsolatos feladatok megoldása.</p>	
<p><b>2.8. Egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek, egyenlőtlenségrendszerek</b></p> <p>2.8.1. Algebrai egyenletek, egyenletrendszerek</p> <p>Elsőfokú egyenletek, egyenletrendszerek</p> <p>Másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek</p> <p>Magasabb fokú egyenletek</p> <p>Négyzetgyökös egyenletek</p>	<p>Ismerje az alaphalmaz és a megoldáshalmaz fogalmát.</p> <p>Alkalmazza a különböző egyenletmegoldási módszereket: mérlegelv, grafikus megoldás, ekvivalens átalakítások, következményegyenletre vezető átalakítások, új ismeretlen bevezetése stb.</p> <p>Tudjon elsőfokú, egyismeretlenes egyenleteket megoldani.</p> <p>Kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer megoldása.</p> <p>Alkalmazza az egyenleteket, egyenletrendszereket szóveges feladatok megoldásában.</p> <p>Ismerje az egyismeretlenes másodfokú egyenlet általános alakját.</p> <p>Tudja meghatározni a diszkrimináns fogalmát.</p> <p>Ismerje és alkalmazza a megoldóképletet.</p> <p>Használja a teljes négyzetté alakítás módszerét.</p> <p>Alkalmazza feladatokban a gyöktényezőző alakot.</p> <p>Tudjon törtes egyenleteket, másodfokú egyenletre vezető szóveges feladatokat megoldani.</p> <p>Másodfokú egyenletrendszerek megoldása.</p> <p>Egyszerű, másodfokúra visszavezethető egyenletek megoldása.</p> <p>Tudjon <math>\sqrt{ax+b} = cx+d</math> típusú egyenleteket megoldani.</p>	<p>Tudjon paraméteres elsőfokú egyenleteket megoldani.</p> <p>Két- és háromismeretlenes elsőfokú egyenletrendszerek megoldása.</p> <p>Egyszerű kétismeretlenes lineáris paraméteres egyenletrendszer megoldása.</p> <p>Igazolja a másodfokú egyenlet megoldóképletét.</p> <p>Igazolja és alkalmazza a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket.</p> <p>Másodfokú paraméteres feladatok megoldása.</p> <p>Tudjon másodfokúra visszavezethető egyenletrendszereket megoldani.</p> <p>Értelmezési tartomány, illetve értékészletvizsgálattal, valamint szorzattá alakítással megoldható feladatok, összetett feladatok megoldása.</p> <p>Tudjon két négyzetre emeléssel megoldható egyenleteket megoldani.</p>
<p>2.8.2. Nem algebrai egyenletek</p> <p>Abszolútértékes egyenletek</p>	<p>Tudjon <math> ax + b  = c</math> típusú egyenleteket algebrai és grafikus módon, valamint <math> ax + b  = cx + d</math> típusú egyenleteket megoldani.</p>	<p>Abszolútértékes egyenletek algebrai megoldása.</p>

TÉMÁK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
Exponenciális és logaritmusos egyenletek Trigonometrikus egyenletek 2.8.3. Egyenlőtlenségek, egyenlőtlenség-rendszerek	Tudjon definíciók és azonosságok közvetlen alkalmazását igénylő feladatokat megoldani.  Tudjon definíciók és azonosságok közvetlen alkalmazását igénylő feladatokat megoldani. Ismerje az egyenlőtlenségek alaptulajdonságait (mérleget alkalmazva).  Egyszerű első- és másodfokú egyenlőtlenségek és egyszerű egyismeretlenes egyenlőtlenség-rendszerek megoldása.	Tudjon megoldani összetett feladatokat.  Tudjon egyszerű négyzetgyökös, abszolútértékes, exponenciális, logaritmusos és trigonometrikus egyenlőtlenségeket megoldani.
<b>2.9. Középértékek, egyenlőtlenségek</b>	Két pozitív szám számtani és mértani közepének fogalma, kapcsolatuk, használatuk.	Ismerje a szám számított középértékeit (aritmetikai, geometriai, négyzetes, harmonikus), valamint a nagyságrendi viszonyaikra vonatkozó tételket. Bizonyítsa, hogy képlet $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ , ha $a, b \in \mathbb{R}^+$ . Tudjon megoldani feladatokat számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján.

### 3. Függvények, az analízis elemei

A témakör (hasonlóan a geometria, illetve a valószínűség-számítás, statisztika fejezetekhez) különösen alkalmas annak szemléltetésére, hogy egy probléma matematikai megoldása három lépésben történik: a matematikai modell megalkotása, a matematikai feladat megoldása a modellen belül, és az eredmény értelmezése. Fontos terület a függvényábrázolás alkalmazása egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásában.

TÉMÁK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
<b>3.1. A függvény</b>	A függvény matematikai fogalma. Ismerje a függvénytani alapfogalmakat (értelmezési tartomány, hozzárendelés, képhalmaz, helyettesítési érték, értékészlet) Tudjon szövegesen megfogalmazott függvényt képlettel megadni.  Tudjon helyettesítési értéket számítani, illetve tudja egyszerű függvények esetén $f(x) = c$ alapján az $x$ -et meghatározni. Ismerje az egy-egyértelmű megfeleltetés fogalmát. Ismerje és alkalmazza a függvényeket gyakorlati problémák megoldásánál. Az inverzfüggvény fogalmának szemléletes értelmezése (pl. az exponenciális és a logaritmus függvény vagy a geometriai transzformációk).	Tudja az alapvető függvénytani fogalmak pontos definícióját.  Ismerje és alkalmazza a függvények megszorításának (leszűkítésének) és kiterjesztésének fogalmát.  Összetett függvény fogalma.

TÉMAK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
<b>3.2. Egyváltozós valós függvények</b>	<p>Ismerje, tudja ábrázolni és jellemezni az alábbi hozzárendeléssel megadott (alapvető) függvényeket:</p> $x \rightarrow ax + b; x \rightarrow x^2; x \rightarrow x^3;$ $x \rightarrow ax^2 + bx + c; x \rightarrow \sqrt{x}; x \rightarrow  x ;$ $x \rightarrow a/x; x \rightarrow \sin x; x \rightarrow \cos x; x \rightarrow \operatorname{tg} x;$ $x \rightarrow a^x; x \rightarrow \log_a x.$	<p>Ismerje és tudja ábrázolni az <math>x \rightarrow x^n; n \in \mathbb{N}</math> függvényt.</p> <p>Tudjon a középszinten felsorolt függvényekből összetett függvényeket képezni.</p>
<p>3.2.1. A függvények grafikonja, függvénytranszformációk</p> <p>3.2.2. A függvények jellemzése</p>	<p>Tudjon értéktáblázat és képlet alapján függvényt ábrázolni, illetve adatokat leolvasni a grafikonról.</p> <p>Tudjon néhány lépéses transzformációt igénylő függvényeket függvénytranszformációk segítségével ábrázolni <math>[f(x) + c; f(x + c); c \cdot f(x); f(xc)]</math></p> <p>Egyszerű függvények jellemzése (grafikon alapján) értékészlet, zérushely, növekedés, fogyás, szélsőérték, periodicitás, paritás szempontjából.</p>	<p>Tudja ábrázolni az alapvető függvények (3.2.) transzformáltjainak grafikonját <math>[c \cdot f(ax + b) + d]</math></p> <p>Függvények jellemzése korlátosság szempontjából.</p> <p>A függvények tulajdonságait az alapfüggvények ismeretében transzformációk segítségével határozza meg.</p> <p>Használja a konvexitás és konkávitás fogalmát a függvények jellemzésére.</p> <p>Egyszerűbb, másodfokú függvényre vezető szélsőérték-feladatok megoldása.</p>
<b>3.3. Sorozatok</b>	<p>Ismerje a számsorozat fogalmát és használja a különböző megadási módjait.</p>	<p>Sorozat jellemzése (korlátosság, monotonitás), a konvergencia szemléletes fogalma.</p> <p>Egyszerű rekurzív képlettel megadott sorozatok.</p>
<p>3.3.1. Számítási és mértani sorozatok</p> <p>Végtelen mértani sor</p> <p>3.3.2. Kamatos kamat, járadékszámítás</p>	<p>Tudjon olyan feladatokat megoldani a számítási és mértani sorozatok témaköréből, ahol a számítási, illetve mértani sorozat fogalmát és az <math>a_n</math>-re, illetve az <math>S_n</math>-re vonatkozó összefüggéseket kell használni.</p> <p>Tudja a kamatos kamatra vonatkozó képletet használni, s abból bármelyik ismeretlen adatot kiszámolni.</p>	<p>Bizonyítsa a számítási és a mértani sorozat általános tagjára vonatkozó összefüggéseket, valamint az összegképleteket.</p> <p>Ismerje a végtelen mértani sor fogalmát, összegét.</p> <p>Tudjon gyűjtőjáradékot és törlesztőrészletet számolni.</p>
<b>3.4. Az egyváltozós valós függvények analízisének elemei</b>		
3.4.1. Határérték, folytonosság		<p>Ismerje a végesben vett véges, a végtelenben vett véges és a tágabb értelemben vett határérték szemléletes fogalmát.</p> <p>A folytonosság szemléletes fogalma.</p>

TÉMÁK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
3.4.2. Differenciálszámítás		<p>Tudja a differencia- és differenciálhányados definícióját.</p> <p>Alkalmazza az összeg, konstansszoros, szorzat- és hányadosfüggvény deriválási szabályait.</p> <p>Alkalmazza egyszerű esetekben az összetett függvény deriválási szabályát.</p> <p>Tudja bizonyítani, hogy <math>(x^n)' = nx^{n-1}</math>, <math>n \in \mathbb{N}</math> esetén.</p> <p>Ismerje a trigonometrikus függvények deriváltját.</p> <p>Alkalmazza a differenciálszámítást:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- érintő egyenletének felírására,</li> <li>- szélsőérték-feladatok megoldására,</li> <li>- polinomfüggvények (menet, szélsőérték, alak) vizsgálatára.</li> </ul>
3.4.3. Integrálszámítás		<p>Ismerje folytonos függvényekre a határozott integrál szemléletes fogalmát és tulajdonságait.</p> <p>Ismerje a kétoldali közelítés módszerét, az integrálfüggvény fogalmát, a primitív függvény fogalmát, valamint a Newton-Leibniz-tételt.</p> <p>Tudja polinomfüggvények, illetve a szinusz és koszinusz függvény grafikonja alatti területet számolni.</p>

#### 4. Geometria, koordinátageometria, trigonometria

A témakör követelményeit abban a tudatban kell megfogalmaznunk, hogy a geometria szerepe, funkciója, hangsúlyai sokat változtak az elmúlt évtizedekben. Ennek következtében a szintetikus geometria egyes területeken háttérbe szorult. Szem előtt kell tartani ugyanakkor, hogy a geometria oktatása segíti a pontos fogalomalkotást, a struktúraalkotás képességét és fejleszti a térszemléletet.

TÉMÁK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
<b>4.1. Elemi geometria</b>  4.1.1. Térelemek	<p>Ismerje és használja megfelelően az alapfogalom, axióma, definiált fogalom, bizonyított tétel fogalmát.</p> <p>Ismerje a térelemeket és a szög fogalmát.</p> <p>Ismerje a szögek nagyság szerinti osztályozását és a nevezetes szögpárokat.</p> <p>Tudja a térelemek távolságára és szögére (pont és egyenes, pont és sík, párhuzamos egyenesek, párhuzamos síkok távolsága; két egyenes, egyenes és sík, két sík hajlásszöge) vonatkozó meghatározásokat.</p>	<p>Alakzatok távolságának értelmezése.</p>



TÉMÁK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
4.1.2. A távolságfogalom segítségével definiált ponthalmazok	Tudja a kör, gömb, szakaszfelező merőleges, szögfelező fogalmát.  Használja a fogalmakat feladatmegoldásokban.	Parabola fogalma.
<b>4.2. Geometriai transzformációk</b> 4.2.1. Egybevágósági transzformációk Síkban  Térben	Ismerje a síkbeli egybevágósági transzformációk (eltolás, tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, pont körüli forgatás) leírását, tulajdonságaikat.  Alkalmazza a feladatokban az eltolás, tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, egybevágósági transzformációkat. Tudjon végrehajtani transzformációkat konkrét esetekben. Ismerje és tudja alkalmazni feladatokban a háromszögek egybevágósági alapeseteit. Ismerje fel és használja feladatokban a különböző alakzatok szimmetriáit.	A geometriai transzformáció mint függvény.  Tudja pontosan megfogalmazni az egybevágósági transzformációk definícióit, a síkidomok egybevágóságának fogalmát, valamint a sokszögek egybevágóságának elégséges feltételét. Pont körüli forgatás alkalmazása.  Ismerje és alkalmazza a térbeli egybevágósági transzformációkat (eltolás, tengely körüli forgatás, pontra vonatkozó tükrözés, síkra vonatkozó tükrözés). Ismerje a hasonlósági transzformáció definícióját.
4.2.2. Hasonlósági transzformációk	Ismerje a transzformációk leírását, tulajdonságait, alkalmazza azokat. Alkalmazza a középpontos nagyítást, kicsinyítést egyszerű, gyakorlati feladatokban. Szakasz adott arányú felosztása. Hasonló alakzatok felismerése, (pl. háromszögek hasonlósági alapesetei) alkalmazása, arány felírása. Tudja és alkalmazza feladatokban a hasonló síkidomok területének arányáról és a hasonló testek felszínének és térfogatának arányáról szóló tételeket.	Tudja a merőleges vetítés definícióját, tulajdonságait. Legyen képes gyakorlati példákban alkalmazni (pl. alaprajz értelmezése).
4.2.3. Egyéb transzformációk Merőleges vetítés		
<b>4.3. Síkbeli és térbeli alakzatok</b>	Ismerje a síkidomok, testek csoportosítását különböző szempontok szerint.	

TÉMAK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
4.3.1. Síkbeli alakzatok Háromszögek	<p>Tudja csoportosítani a háromszögeket oldalak és szögek szerint.</p> <p>Ismerje és alkalmazza az alapvető összefüggéseket háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei között (háromszög-egyenlőtlenség, belső, illetve külső szögek összege, nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van).</p> <p>Ismerje és alkalmazza speciális háromszögek tulajdonságait.</p> <p>Tudja a háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó definíciókat, tételeket (oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, súlyvonal, középvonal, körülírt, illetve beírt kör).</p> <p>Ismereteit alkalmazza egyszerű feladatokban.</p> <p>Ismerje és alkalmazza a Pitagorasz-tételt és megfordítását.</p> <p>Ismerje és alkalmazza feladatokban a magasság- és a befogótételt.</p>	<p>Bizonyítsa a háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó tételeket (körülrírt és beírt kör középpontja; magasságpont, súlypont, középvonal tulajdonságai).</p>
Négyszögek	<p>Ismerje és alkalmazza a Pitagorasz-tételt és megfordítását.</p> <p>Ismerje és alkalmazza feladatokban a magasság- és a befogótételt.</p> <p>Ismerje a négyszögek fajtáit (trapéz, paralelogramma, deltoid) és tulajdonságaikat, alkalmazza ismereteit egyszerű feladatokban.</p> <p>Konvex síknégyszög belső és külső szögeinek összege, alkalmazásuk egyszerű feladatokban.</p>	<p>Bizonyítsa a Pitagorasz-tételt és megfordítását.</p> <p>Bizonyítsa a magasság- és a befogótételt.</p>
Sokszögek	<p>Ismerje és alkalmazza konvex sokszögeknél az átlók számára, a belső és külső szögösszegekre vonatkozó tételeket.</p>	<p>Húrnégyszög, érintőnégyyszög tételének ismerete (bizonyítással) és alkalmazása.</p>
Kör	<p>Tudja a szabályos sokszögek definícióját.</p> <p>A kör részeinek ismerete, alkalmazása egyszerű feladatokban.</p> <p>Tudja és használja, hogy a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, s hogy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak.</p> <p>A szög mérése fokban és radiánban.</p> <p>Tudja és alkalmazza feladatokban, hogy a középponti szög arányos a körívvel és a hozzá tartozó körcikk területével.</p> <p>Tudja és alkalmazza feladatokban a Thalész-tételt és megfordítását.</p>	<p>A konvex sokszög átlóinak száma, a belső és külső szögösszegekre vonatkozó tétel bizonyítása.</p> <p>Bizonyítsa, hogy a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, valamint hogy a külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak.</p> <p>Igazolja és alkalmazza feladatokban a kerületi és középponti szögek tételét.</p> <p>Ismerje és használja a látókör fogalmát.</p>
4.3.2. Térbeli alakzatok	<p>Tudja és alkalmazza feladatokban, hogy a középponti szög arányos a körívvel és a hozzá tartozó körcikk területével.</p> <p>Tudja és alkalmazza feladatokban a Thalész-tételt és megfordítását.</p> <p>Forgáshenger, forgáskúp, gúla, hasáb, gömb, csonkagúla, csonkakúp ismerete, alkalmazása egyszerű feladatokban.</p>	<p>Bizonyítsa a Thalész-tételt és megfordítását.</p>
<b>4.4. Vektorok síkban és térben</b>	<p>Ismerje és alkalmazza feladatokban a következő definíciókat, tételeket:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- vektor fogalma, abszolútértéke,</li> <li>- nullvektor, ellentett vektor,</li> </ul>	

TÉMAK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
	<ul style="list-style-type: none"> <li>- vektorok összege, különbsége, vektor skalárszorosa,</li> <li>- vektorműveletekre vonatkozó műveleti azonosságok,</li> <li>- vektor felbontása összetevőkre.</li> </ul> Skaláris szorzat definíciója; tulajdonságai. Ismerje és alkalmazza feladatokban a következő definíciókat, tételeket: <ul style="list-style-type: none"> <li>- vektor koordinátái,</li> <li>- a vektor <math>90^\circ</math>-os elforgatottjának koordinátái,</li> <li>- vektorok összegének, különbségének, skalárral való szorzatának koordinátái,</li> <li>- skalárszorzat kiszámítása koordinátákból.</li> </ul> Vektorok alkalmazása feladatokban.	A skalárszorzat koordinátákból való kiszámításának bizonyítása.
<b>4.5. Trigonometria</b>	Tudja hegyesszögek szögfüggvényeit derékszögű háromszög oldalárányaival definiálni, ismereteit alkalmazza feladatokban. Tudja a szögfüggvények általános definícióját. Tudja és alkalmazza a szögfüggvényekre vonatkozó alapvető összefüggéseket: pótszögek, kiegészítő szögek, negatív szög szögfüggvénye, pitagoraszai összefüggés. Tudjon hegyes szögek esetén szögfüggvényeket kifejezni egymásból. Ismerje és alkalmazza a nevezetes szögek ( $30^\circ$ , $45^\circ$ , $60^\circ$ ) szögfüggvényeit.  Tudja és használja a szinusz- és a koszinusztételt. Tudjon számolásokat végezni általános háromszögben.	Tudjon szögfüggvényeket kifejezni egymásból. Függvénytáblázat segítségével tudja alkalmazni egyszerű feladatokban az addíciós összefüggéseket [ $\sin(\alpha \pm \beta)$ , $\cos(\alpha \pm \beta)$ , $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ ].  Bizonyítsa a szinusz- és a koszinusztételt.
<b>4.6. Koordinátageometria</b> 4.6.1. Pontok, vektorok  4.6.2. Egyenes	→ Tudja $AB$ vektor koordinátáit, abszolútértékét.  Két pont távolságának, szakasz felezőpontjának, harmadoló pontjainak felírása, alkalmazása feladatokban.  A háromszög súlypontja koordinátáinak felírása, alkalmazása feladatokban.  Tudja felírni különböző adatokkal meghatározott egyenesek egyenletét. Egyenesek metszéspontjának számítása. Ismerje egyenesek párhuzamosságának és merőlegességének koordinátageometriai feltételeit.	Szakasz felezőpontja és harmadoló pontjai koordinátáinak kiszámítására vonatkozó összefüggések igazolása.  Igazolja a háromszög súlypontjának koordinátáira vonatkozó összefüggést.  Az egyenes egyenletének levezetése különböző kiindulási adatokból a síkban.

TÉMAK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
4.6.3. Kör	<p>Elemi háromszög- és négyszög-geometriai feladatok megoldása koordinátageometriai eszközökkel.</p> <p>Adott középpontú és sugarú körök egyenletének felírása.</p> <p>Kétismeretlenes másodfokú egyenletből a kör középpontjának és sugarának meghatározása.</p> <p>Kör és egyenes metszéspontjának meghatározása.</p> <p>A kör adott pontjában húzott érintő egyenletének felírása.</p> <p>Alkalmazza ismereteit feladatokban.</p>	<p>A kör egyenletének levezetése.</p> <p>A kör és a kétismeretlenes másodfokú egyenlet kapcsolata.</p> <p>Két kör kölcsönös helyzetének meghatározása, metszéspontjainak felírása.</p> <p>Külső pontból húzott érintő egyenletének felírása.</p>
4.6.4. Parabola		<p>A parabola <math>x^2 = 2py</math> alakú egyenletének levezetése.</p> <p>Feladatok a koordinátatengelyekkel párhuzamos tengelyű parabolákra.</p>
4.7. Kerület, terület	<p>Ismerje a kerület és a terület szemléletes fogalmát.</p> <p>Háromszög területének kiszámítása különböző adatokból:</p> $t = \frac{a \cdot m_a}{2}, t = \frac{ab \cdot \sin \gamma}{2}$ <p>Nevezetes négyszögek területének számítása.</p> <p>Szabályos sokszögek kerületének és területének számítása.</p> <p>Kör, körcikk, körszelet kerülete, területe.</p> <p>Kerület- és területszámítási feladatok.</p>	<p>A háromszög területének kiszámítására használt képletek bizonyítása, további összefüggések:</p> <p><math>t = sr</math> (bizonyítással),</p> $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ <p>alkalmazása.</p> <p>A területképletek bizonyítása.</p>
4.8. Felszín, térfogat	<p>Ismerje a felszín és a térfogat szemléletes fogalmát.</p> <p>Hasáb, gúla, forgáshenger, forgáskúp, gömb, csonkagúla és csonkakúp felszínének és térfogatának kiszámítása képletbe való behelyettesítéssel.</p>	<p>Térgeometriai feladatok megoldása.</p>

## 5. Valószínűség-számítás, statisztika

A modern tudományelmélet egyik fontos pillére az a gondolkodásmód, amellyel a sztochasztikus jelenségek leírhatók. A társadalomtudományi, a természettudományi és a közgazdasági törvényeink nagy része csak statisztikusan igaz. A mindennapi élet történéseit sem lehet megérteni statisztikai ismeretek nélkül, mivel ott is egyre gyakrabban olyan tömegjelenségekkel kerülünk szembe, amelyek a statisztika eszközeivel kezelhetők. A sztochasztika gondolkodásmódja a XXI. század elejére az emberi gondolkodásnak, döntéseknek és cselekvéseknek olyannyira alapvető része lesz, hogy elsajátítása semmiképpen sem kerülhető meg.

Ebben a témakörben középszinten csak az alapfogalmak megértését és használatát követeljük meg, míg emelt szinten a téma matematikai felépítésének egyes részéről is számot kell adni. E fejezet követelményrendszere két ellentétes tendencia közötti kompromisszum jegyében született, mely szerint alapvető társadalmi szükség mutatkozik a téma iránt, miközben a tanításban elfoglalt helye ma még igencsak periférikus.

TÉMÁK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	Emelt szint
<p><b>5.1. Leíró statisztika</b></p> <p>5.1.1. Statisztikai adatok gyűjtése, rendszerezése, különböző ábrázolásai</p> <p>5.1.2. Nagy adathalmazok jellemzői, statisztikai mutatók</p>	<p>Tudjon adott adathalmazt szemléltetni.</p> <p>Tudjon adathalmazt táblázatba rendezni és táblázattal megadott adatokat feldolgozni.</p> <p>Értse a véletlenszerű mintavétel fogalmát. Tudjon kördiagramot és oszlopdiagramot készíteni. Tudjon adott diagramról információt kiolvasni.</p> <p>Tudja és alkalmazza a következő fogalmakat: osztályba sorolás, gyakorisági diagram, relatív gyakoriság.</p> <p>Ismerje és alkalmazza a következő fogalmakat:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- aritmetikai átlag (súlyozott számtani közép),</li> <li>- medián (rendezett minta közepe),</li> <li>- módusz (leggyakoribb érték).</li> </ul> <p>Ismerje és használja a következő fogalmakat: terjedelem, átlagos abszolút eltérés, szórás. Szórás kiszámolása adott adathalmaz esetén számológéppel.</p> <p>Tudjon adathalmazokat összehasonlítani a tanult statisztikai mutatók segítségével.</p>	<p>Tudjon hisztogramot készíteni, és adott hisztogramról információt kiolvasni.</p> <p>Ismerje az adathalmazok egyesítése és átlaguk közötti kapcsolatot.</p>
<p><b>5.2. A valószínűség-számítás elemei</b></p>	<p>Véges sok kimenetel esetén szimmetriamegfontolásokkal számítható valószínűségek (egyenlő esélyű elemi eseményekből) egyszerű feladatokban. Esemény, eseménytér konkrét példák esetén.</p> <p>A klasszikus (Laplace)-modell ismerete.</p> <p>Szemléletes kapcsolat a relatív gyakoriság és a valószínűség között.</p> <p>Valószínűségek kiszámítása visszatevéses mintavétel esetén, binomiális eloszlás.</p>	<p>Ismerje és alkalmazza a következő fogalmakat: események egyesítésének, metszetének és komplementerének valószínűsége, feltételes valószínűség, függetlenség, függőség.</p> <p>A nagy számok törvényének szemléletes tartalma (nagyobb n-ekre valószínűbb, hogy <math> k/n - p  &lt; \delta</math>).</p> <p>Geometriai valószínűség.</p> <p>A binomiális eloszlás (visszatevéses modell) és a hipergeometriai eloszlás (visszatevés nélküli modell) tulajdonságai és ábrázolása. Várható érték, szórás fogalma és kiszámítása a diszkrét egyenletes és a binomiális eloszlás esetén.</p> <p>A binomiális eloszlás alkalmazása. A minta relatív gyakoriságának becslése a sokaság paraméterének ismeretében.</p>