Nagy Dávid G.
NADQACT.ELTE
2. kvantum gyak. bead

3. FELADAT

ψ_1, ψ_2 azonos energiájú hullámfüggvények

erekre a Schrödinger-egyenlet:

$$\frac{\partial^2 \psi_n(x)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi_n(x) = 0 \quad , n \in \{1, 2\}$$

balról beszorozva a másik ψ-vel

$$\psi_2 \psi_1'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi_2\psi_1 = 0 \quad (\mathrm{I})$$

$$- \quad \psi_1 \psi_2'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi_1\psi_2 = 0 \quad (\mathrm{II})$$

$$\psi_2\psi_1'' - \psi_1\psi_2'' = 0 = \quad (\mathrm{I})-(\mathrm{II})$$

$$= (\psi_1'\psi_2)' - (\psi_1\psi_2')'$$ teljes derivált

$$\Downarrow$$

$$\psi_1'\psi_2 - \psi_1\psi_2' = \text{konst}$$

felhasználva hogy $\psi_n(x=\pm\infty) = 0$

konstans = 0

így a $\frac{\psi_1'}{\psi_1} = \frac{\psi_2'}{\psi_2}$ szétválasztható egyenletet megoldva

$$\int \frac{1}{\psi_n} d\psi_n = \int c\, dx$$

$$\ln \psi_1 = cx + k_1 \quad \Longrightarrow \quad \ln(\psi_1) = \ln(\psi_2) + \ln(k_3)$$

$$- \quad \ln \psi_2 = cx + k_2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\psi_1(x) = k_3 \psi_2(x)} \rightarrow$$ tehát csak konstans szorzóban különböznek

Nagy Dávid

NADQACT.ELTE

2. kurzus gyak.

4. FELADAT

$$\psi_n'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E_n - V)\psi_n = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

$$\psi_{n+m}'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E_{n+m} - V)\psi_{n+m} = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

$$\psi_{n+m} \cdot (\mathrm{I}) - \psi_n \cdot (\mathrm{II}) \Rightarrow$$

$$\psi_n''\psi_{n+m} - \psi_n\psi_{n+m}'' = \frac{2m}{\hbar^2}(E_{n+m} - V)\psi_{n+m}\psi_n - \frac{2m}{\hbar^2}(E_n - V)\psi_{n+m}\psi_n$$

$$\int_\alpha^\beta \left(\psi_n'\psi_{n+m} - \psi_n\psi_{n+m}'\right)' dx = \int_\alpha^\beta \frac{2m}{\hbar^2}(E_{n+m} - E_n)\psi_{n+m}\psi_n \, dx$$

$$\underbrace{\left[\psi_n'\psi_{n+m} - \psi_n\psi_{n+m}'\right]_\alpha^\beta}_{\mathrm{III.}} = \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(E_{n+m} - E_n)\underbrace{\int \psi_{n+m}\psi_n \, dx}_{\mathrm{IV.}}}_{\mathrm{V.}} \qquad (\mathrm{VI.})$$

$x \in (\alpha,\beta)$-ban $\quad sig(\psi_n(x)) = konst \quad konst \in \{1, -1\}$

ha feltesszük, hogy $sig(\psi_{n+m}(x)) = konst$ (tehát nincs zérushely (α,β)-ban)

$sig\left[\psi_n'(\beta)\psi_{n+m}(\beta) - \psi_n(\beta)\psi_{n+m}'(\beta) - \psi_n'(\alpha)\psi_{n+m}(\alpha) - \psi_n(\alpha)\psi_{n+m}'(\alpha)\right]$ III

	$\psi_n'(\beta)$	$\psi_{n+m}(\beta)$	$\psi_n(\beta)\psi_{n+m}'(\beta)$	$\psi_n'(\alpha)$	$\psi_{n+m}(\alpha)$	$\psi_n(\alpha)\psi_{n+m}'(\alpha)$	III
ha konst = 1	1	1	$\cancel{0}$	−1	1	$\cancel{0}$	1
	1	−1		−1	−1		−1
ha konst = −1	−1	1		−1	1		−1
	−1	−1		1	−1		1

tehát konst = 1 esetén $sig(\psi_{n+m}(x)) = -\, sig(\mathrm{III.})$

viszont $\quad \operatorname{sig}(\text{III.}) = \operatorname{sig}(\text{V.}) = \operatorname{sig}(\psi_{n+m}(x))$

tehát ha ψ_{n+m} nem vált előjelet $x \in (\alpha, \beta)$-n

akkor

$$\operatorname{sig}(\psi_{n+m}(x)) = \operatorname{sig}(\text{V.}) = -\operatorname{sig}(\text{III.})$$

viszont (VI.) szerint $\updownarrow$

$$\operatorname{sig}(\text{V.}) = \operatorname{sig}(\text{III.})$$

~~az~~ tehát ψ_{n+m} előjelet kell váltson (α, β)-n.