1. Feladat

A Lagrange-függvény:

$$L = \frac{1}{2}m(x'(t)^2 + y'(t)^2) - V(\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2})$$

A Hamilton-függvény megkapható a Lagrange-függvényből:

$$H = \sum_i p_i(t)\frac{\partial q_i(t)}{\partial t} - L$$

Így centrális potenciálban:

$$\mathrm{H} = -\frac{1}{2}m(x'(t)^2 + y'(t)^2) + mx'(t)^2 + my'(t)^2 - V(\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2})$$

$$H = \frac{1}{2}mx'(t)^2 + \frac{1}{2}my'(t)^2 - V\left(\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}\right)$$

A Runge-Lenz-vektor 1/r-es potenciálban marad meg, így feltételezem hogy ilyen potenciállal kell számolni, tehát a Hamilton a továbbiakban:

$$H = \frac{1}{2}mx'(t)^2 + \frac{1}{2}my'(t)^2 - \frac{1}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}$$

A Runge-Lenz-vektor (**a**):

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n} - \frac{m\boldsymbol{r}}{\mathrm{r}}$$

ahol **n** az impulzusmomentum:

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy'(t) - yx'(t) \end{pmatrix}$$

p pedig az impulzus:

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} mx'(t) \\ my'(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

így

$$\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} m^2\,\mathrm{x}(t)\,y'(t)^2 - m^2\,\mathrm{y}(t)\,x'(t)y'(t) \\ m^2\,\mathrm{y}(t)\,x'(t)^2 - m^2\,\mathrm{x}(t)\,x'(t)y'(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

és

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{mx}(t)}{\sqrt{\mathrm{x}(t)^2+\mathrm{y}(t)^2}} - m^2\,\mathrm{y}(t)\,x'(t)y'(t) + m^2\,\mathrm{x}(t)\,y'(t)^2 \\ -\frac{\mathrm{my}(t)}{\sqrt{\mathrm{x}(t)^2+\mathrm{y}(t)^2}} - m^2\,\mathrm{x}(t)\,x'(t)y'(t) + m^2\,\mathrm{y}(t)\,x'(t)^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Azt nem tudom hogy a Poisson-zárójelet vektor és függvény között hogyan lehet értelmezni, ha komponensenként nézem akkor:

$$\{a_1, H\} = my'(t)\left(\frac{\mathrm{mx}(t)\,\mathrm{y}(t)}{(\mathrm{x}(t)^2+\mathrm{y}(t)^2)^{3/2}} - m^2x'(t)y'(t)\right) + mx'(t)\left(m^2y'(t)^2 + \frac{m\,\mathrm{x}(t)^2}{(\mathrm{x}(t)^2+\mathrm{y}(t)^2)^{3/2}} - \frac{m}{\sqrt{\mathrm{x}(t)^2+\mathrm{y}(t)^2}}\right) - \frac{\mathrm{y}(t)\left(2m^2\,\mathrm{x}(t)\,y'(t) - m^2\,\mathrm{y}(t)\,x'(t)\right)}{(\mathrm{x}(t)^2+\mathrm{y}(t)^2)^{3/2}} + \frac{m^2\,\mathrm{x}(t)\,\mathrm{y}(t)\,y'(t)}{(\mathrm{x}(t)^2+\mathrm{y}(t)^2)^{3/2}} = 0$$

Hasonlóan

$$\{a_2, H\} = 0$$

illetve hosszabb számolással, ha a vektor hosszát nézem:

$$\{|\boldsymbol{a}|, H\} = 0$$

ami a gyakorlat alapján azt jelenti hogy a vektor mozgásállandó. Mivel **n**-nek csak a z komponense nem 0, ezért csak ezzel a komponenssel lenne értelme nézni a Runge-Lenz-vektorral vett Poisson-zárójelét. Viszont **a**-nak pont a z komponense 0. Ha **a** hosszával számolunk az szintén hosszú, de végeredményül ugyanaz jön ki:

$$\{\boldsymbol{a}, n_3\} = 0$$

2. Feladat

Mivel az impulzusmomentum (m=1 az egyszerűség kedvéért, a végeredményen nem változtat):

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{r}'$$

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \mathrm{y}(t)\,z'(t) - \mathrm{z}(t)\,y'(t) \\ \mathrm{z}(t)\,x'(t) - \mathrm{x}(t)\,z'(t) \\ \mathrm{x}(t)\,y'(t) - \mathrm{y}(t)\,x'(t) \end{pmatrix}$$

és

$$r = \begin{pmatrix} \mathrm{x}(t) \\ \mathrm{y}(t) \\ \mathrm{z}(t) \end{pmatrix}$$

illetve

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

Így például $\{n_1, n_2\}$ –re:

$$\frac{\partial(z(t)x'(t)-x(t)z'(t))}{\partial x'(t)}\frac{\partial(y(t)z'(t)-z(t)y'(t))}{\partial x(t)}-\frac{\partial\big(\mathrm{z}(t)\,x'(t)-\mathrm{x}(t)\,z'(t)\big)}{\partial\,\mathrm{x}(t)}\frac{\partial\big(\mathrm{y}(t)\,z'(t)-\mathrm{z}(t)\,y'(t)\big)}{\partial x'(t)}=0$$

$$\frac{\partial(z(t)x'(t)-x(t)z'(t))}{\partial y'(t)}\frac{\partial(y(t)z'(t)-z(t)y'(t))}{\partial y(t)}-\frac{\partial\big(\mathrm{z}(t)\,x'(t)-\mathrm{x}(t)\,z'(t)\big)}{\partial\,\mathrm{y}(t)}\frac{\partial\big(\mathrm{y}(t)\,z'(t)-\mathrm{z}(t)\,y'(t)\big)}{\partial y'(t)}=0$$

$$\frac{\partial(z(t)x'(t)-x(t)z'(t))}{\partial z'(t)}\frac{\partial(y(t)z'(t)-z(t)y'(t))}{\partial z(t)}-\frac{\partial\big(\mathrm{z}(t)\,x'(t)-\mathrm{x}(t)\,z'(t)\big)}{\partial\,\mathrm{z}(t)}\frac{\partial\big(\mathrm{y}(t)\,z'(t)-\mathrm{z}(t)\,y'(t)\big)}{\partial z'(t)}=x(t)y'(t)-y(t)x'(t)$$

ennek mintájára a megfelelő i,j komponensek Poisson-zárójelei egy mátrixot alkotnak:

$$\{n_i,n_j\}=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{x}(t)\,y'(t)-\mathrm{y}(t)\,x'(t) & \mathrm{x}(t)\,z'(t)-\mathrm{z}(t)\,x'(t)\\ \mathrm{y}(t)\,x'(t)-\mathrm{x}(t)\,y'(t) & 0 & \mathrm{y}(t)\,z'(t)-\mathrm{z}(t)\,y'(t)\\ \mathrm{z}(t)\,x'(t)-\mathrm{x}(t)\,z'(t) & \mathrm{z}(t)\,y'(t)-\mathrm{y}(t)\,z'(t) & 0\end{pmatrix}$$

Ami egyszerűbben írható a következő alakban:

$$\{n_i,n_j\}=\sum_k \epsilon_{\mathrm{ijk}}n_k$$

3. Feladat

N=1-re:

$$\{f(q'),g(q,q',t)\}=\frac{\partial f(q'(t))}{\partial q(t)}\frac{\partial g(q(t),q'(t),t)}{\partial q'(t)}-\frac{\partial f(q'(t))}{\partial q'(t)}\frac{\partial g(q(t),q'(t),t)}{\partial q(t)}$$

Így N esetre általánosítva:

$$\{f,g\}=\sum_i f'(q_i')\cdot\frac{\partial g(q_i,q_i',t)}{\partial q_i}$$

4.Feladat

A rugók potenciálját az általuk keltett erőből számolom, ϕ általános koordináta a rendszer függőleges szimmetriatengelyével bezárt szög.

$$F_{\text{rugók}}=-2kR\phi(t)$$

$$V_{\text{rugók}}=\int 2kR\phi(t)\,d\phi(t)\ \ =kR\phi[t]^2$$

$$V=kR\phi(t)^2+g\,l\,m\cos(\phi(t))$$

$$K=\frac{1}{2}l^2m\phi'(t)^2$$

Így a Lagrange:

$$L=K-V=-g\,l\,m\cos(\phi(t))-kR\phi(t)^2+\frac{1}{2}l^2m\phi'(t)^2$$

Az egyensúlyi pont:

$$V'(\phi_F)=-glm\sin(\phi(t))+2kR\,\phi(t)=0$$

Tehát $\phi_F = 0$. Kis kitérésekre:

$$k' = V''(\phi_F) = -glm\cos(0) + 2kR = -glm + 2kR$$

Így ha

$$2kR > glm$$

Akkor a kis rezgések frekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\frac{-glm + 2kR}{m}}$$

Ahol a frekvencia komplexé válna, azaz

$$2kR < glm$$

esetén a test túl nehéz, vagy túl magasan van, és ledől az alátámasztásra. Ott viszont nem tud rezegni, mert lefelé nem tud jobban kitérni (végtelen nagy lehet a visszatérítő erő).

5. Feladat

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\sum_i p_i(t)\frac{\partial q_i(t)}{\partial t} - L(p_i, q_i, \lambda)\right) = 0 - \frac{\partial\, L(p_i, q_i, \lambda)}{\partial \lambda}$$